Profil Pemahaman Mahasiswa pada Konsep Fungsi Distribusi Probabilitas Berdasarkan Teori APOS

Rahma Ramadhani*[1], Iesyah Rodliyah[2], Nihayatus Sa'adah[3], Nanndo Yannuansa[4], Tafsillatul Mufida Asriningsih[5]
[1,2,3.4] Fakultas Ilmu Pendidikan, Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng Jombang
[5]Fakultas Bisnis, Bahasa, dan Pendidikan, Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum Jombang
e-mail: *[1]rahmaramadhani@unhasy.ac.id , [2]iesyahrodliyah@unhasy.ac.id , [3]nihayatussaadah@unhasy.ac.id , [4]nanndoyannuansa@unhasy.ac.id, [5] tafsillatul@mipa.unipdu.ac.id

Abstract. *Understanding probability distribution functions requires procedural skills and connections among random variables, probability mass functions (PMFs), probability density functions (PDFs), and cumulative distribution functions (CDFs). This descriptive qualitative study examined students' understanding of these concepts using APOS theory (Action, Process, Object, and Schema). Diagnostic test responses and semi-structured interviews from three purposively selected students were analyzed using APOS indicators. The results showed that the students had procedural skills but differed in conceptual consistency. M1 calculated interval probabilities using CDF differences and PDF integration but initially showed inconsistent understanding of CDF properties. M2 connected PMFs/PDFs, CDFs, and probability calculations relatively consistently, although the evidence was insufficient to confirm an integrated and stable Schema. M3 incorrectly applied the complement rule and inconsistently explained jumps in discrete CDFs. The novelty of this study lies in analyzing the connections among PMFs/PDFs, CDFs, and probability determination using the APOS framework. The findings suggest that instruction should encourage students to explain CDF properties, compare probability calculations using CDF differences and PDF integration, and justify the use of the complement rule. The findings are limited to the three selected students and the diagnostic tasks analyzed.*

Keywords: *APOS, probability distribution function, students, conceptual understanding, probability.*

Abstrak. *Pemahaman fungsi distribusi probabilitas menuntut kemampuan prosedural serta koordinasi konsep variabel acak, probability mass function (PMF), probability density function (PDF), dan cumulative distribution function (CDF). Penelitian kualitatif deskriptif ini mengkaji pemahaman mahasiswa berdasarkan teori APOS (Action, Process, Object, Schema). Data berupa jawaban tes diagnostik dan wawancara semi-terstruktur dari tiga mahasiswa yang dipilih secara purposif dianalisis menggunakan indikator APOS. Ketiga mahasiswa menunjukkan kemampuan prosedural, tetapi konsistensi pemahaman konseptualnya berbeda. M1 mampu menentukan probabilitas interval melalui selisih CDF dan integral PDF, tetapi pada awalnya belum konsisten memahami sifat CDF. M2 relatif konsisten menghubungkan PMF/PDF, CDF, dan penentuan probabilitas, meskipun bukti belum cukup untuk memastikan Schema yang terintegrasi dan stabil. M3 keliru menerapkan aturan komplemen dan memberikan penjelasan yang tidak konsisten mengenai loncatan CDF pada distribusi diskrit. Kebaruan penelitian ini terletak pada analisis koordinasi PMF/PDF, CDF, dan penentuan probabilitas melalui kerangka APOS. Temuan ini mengarahkan pembelajaran pada kegiatan menjelaskan sifat CDF, membandingkan penentuan probabilitas melalui selisih CDF dan integral PDF, serta memberikan alasan penggunaan aturan komplemen. Temuan terbatas pada tiga mahasiswa terpilih dan tugas diagnostik yang dianalisis.*

Kata Kunci: *APOS, fungsi distribusi probabilitas, mahasiswa, pemahaman konsep, probabilitas*

PENDAHULUAN

Pemahaman konseptual merupakan fondasi penting dalam pembelajaran matematika di perguruan tinggi. Mahasiswa tidak hanya perlu menjalankan prosedur, tetapi juga memahami makna, keterkaitan konsep, dan alasan matematis yang mendasarinya. Dalam pembelajaran probabilitas, kesulitan sering muncul ketika mahasiswa menghubungkan berbagai representasi dan mengembangkan penalaran (Batanero & Álvarez-Arroyo, 2024).

Fungsi distribusi probabilitas mengharuskan mahasiswa memahami hubungan antara variabel acak dan distribusi peluang. Pada distribusi diskrit, *probability mass function* (PMF) menyatakan peluang pada nilai tertentu, sedangkan pada distribusi kontinu, *probability density function* (PDF) digunakan untuk menentukan peluang melalui integrasi. *Cumulative distribution function* (CDF) menyatakan peluang kumulatif hingga suatu titik. Penelitian terdahulu melaporkan kesulitan dalam menghubungkan ruang sampel, variabel acak, dan distribusi peluang (Lee et al., 2020), serta keterbatasan penggunaan representasi grafik dan tabel (Carrera et al., 2021). Kesulitan memahami fungsi juga dapat memengaruhi pemahaman variabel acak dan distribusinya (Leyton & Rodríguez, 2022). Penelitian lain menemukan kesulitan dalam memahami konsep probabilitas, menentukan fungsi peluang variabel acak diskrit, dan menyelesaikan masalah distribusi peluang (Artuti et al., 2021; Nurrahmah et al., 2021; Sulfiah et al., 2021). Kesulitan serupa ditemukan dalam pemecahan masalah statistik dan representasi matematis mahasiswa (Makwakwa et al., 2023; Supriadi & Ningsih, 2022). Sementara itu, Santoso et al. (2025) mengkaji pemahaman konsep peluang melalui pembelajaran berbasis permainan.

Teori APOS (*Action*, *Process*, *Object*, *Schema*) menyediakan kerangka untuk menelusuri konstruksi mental mahasiswa dalam mempelajari matematika. *Action* merujuk pada tindakan terhadap objek matematika, *Process* pada interiorisasi tindakan menjadi proses, *Object* pada pembentukan objek matematika dari proses yang telah terbentuk, dan *Schema* pada koordinasi berbagai struktur mental menjadi pemahaman yang terintegrasi (Arnon et al., 2014; Dubinsky & Mcdonald, 2001). Struktur APOS tidak dipandang sebagai tahapan linear dan kaku, tetapi digunakan sebagai kerangka analitis untuk menafsirkan bukti pemahaman mahasiswa yang tercermin dalam jawaban tertulis dan penjelasan wawancara.

Teori APOS (*Action*, *Process*, *Object*, dan *Schema*) telah digunakan untuk menganalisis konstruksi pemahaman pada berbagai konsep matematika. Syamsuri & Santosa (2021) mengkaji pemahaman konsep peluang, sedangkan Pramesti & Mampouw (2020) menganalisis pemahaman peluang siswa SMP. Dalam bidang statistika, Bansilal (2014) menggunakan APOS untuk mengkaji respons terhadap persoalan distribusi normal, sementara Ng & Chew (2023) menganalisis kesalahan dalam memahami ukuran penyebaran. Penerapan APOS juga ditemukan pada persamaan diferensial (Supratman et al., 2022), serta konsep trigonometri, turunan,

himpunan, dan fungsi (Asra & Boriboon, 2025; Listiawati et al., 2025; M & Martin, 2024; Tiengyoo et al., 2024; Trigueros et al., 2024). Penelitian Wijaya et al. (2021) turut mengkaji lintasan belajar probabilitas melalui pembelajaran berbasis permainan.

Meskipun APOS telah digunakan untuk mengkaji konsep peluang, penelitian Syamsuri & Santosa (2021) berfokus pada pemahaman peluang secara umum. Penelitian ini secara khusus mengkaji pemahaman mahasiswa mengenai fungsi distribusi probabilitas, meliputi hubungan variabel acak, PMF, PDF, dan CDF, pembentukan serta interpretasi CDF, penentuan probabilitas, dan pemahaman sifat CDF. Miskonsepsi pada fungsi peluang variabel acak diskrit yang dilaporkan Nurrahmah et al. (2021) semakin menegaskan pentingnya kajian tersebut. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan mendeskripsikan profil pemahaman mahasiswa pada konsep fungsi distribusi probabilitas berdasarkan teori APOS melalui analisis jawaban tes diagnostik dan wawancara. Hasil penelitian diharapkan menjadi informasi diagnostik bagi dosen dalam merancang pembelajaran probabilitas yang menekankan keterkaitan antarkonsep dan penalaran matematis.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif untuk mendeskripsikan pemahaman mahasiswa pada konsep fungsi distribusi probabilitas berdasarkan teori APOS, bukan untuk menguji efektivitas perlakuan. Penelitian dilaksanakan dalam pembelajaran Statistika Matematika di Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Hasyim Asy'ari Tebuireng Jombang. Tes diagnostik diberikan kepada 15 mahasiswa. Enam mahasiswa kemudian diwawancarai secara semi-terstruktur untuk mengklarifikasi jawaban tertulis dan menggali alasan matematis. Dari enam mahasiswa tersebut, tiga dipilih secara purposif untuk dianalisis secara mendalam berdasarkan variasi pola jawaban, bukti pemahaman yang dapat dianalisis menggunakan indikator APOS, dan kecukupan data wawancara. Ketiganya diberi kode M1, M2, dan M3.

Data dikumpulkan melalui tes diagnostik uraian dan wawancara semi-terstruktur. Tes disusun berdasarkan *genetic decomposition* dalam teori APOS (Arnon et al., 2014), meliputi identifikasi variabel acak, pemeriksaan PMF dan PDF, pembentukan CDF, penentuan probabilitas, interpretasi loncatan CDF, dan hubungan antarkonsep. Wawancara digunakan untuk mengklarifikasi langkah penyelesaian dan menggali alasan matematis. Data dianalisis melalui reduksi, penyajian, dan penarikan kesimpulan dengan menelaah jawaban tertulis dan wawancara berdasarkan indikator *Action*, *Process*, *Object*, dan *Schema*. Kedua sumber data dibandingkan untuk memeriksa konsistensi interpretasi. Jika ditemukan perbedaan, jawaban tertulis dan penjelasan wawancara dipertimbangkan bersama, termasuk klarifikasi mahasiswa. Kesimpulan disusun berdasarkan bukti yang relevan tanpa memperlakukan APOS sebagai

tahapan perkembangan yang kaku. Indikator analisis disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Indikator APOS dan *Genetic Decomposition* Fungsi Distribusi Probabilitas

Struktur/konstruksi	Indikator analisis	Bukti yang diharapkan
Prasyarat	Memahami konsep fungsi, interval, integral dasar, probabilitas, dan variabel acak.	Menentukan nilai yang mungkin dari variabel acak, membedakan variabel acak diskrit dan kontinu, serta menjelaskan pemetaan nilai variabel acak secara tepat.
Action	Mengidentifikasi variabel acak serta memeriksa keabsahan PMF dan PDF melalui prosedur perhitungan.	Memeriksa apakah jumlah probabilitas PMF sama dengan 1, memeriksa nonnegativitas PMF/PDF, dan memastikan integral PDF pada domainnya sama dengan 1.
Process	Menjelaskan pembentukan CDF dari PMF melalui penjumlahan kumulatif dan dari PDF melalui integrasi.	Menjelaskan proses memperoleh CDF dari PMF/PDF serta menunjukkan hubungan antara CDF, PDF, dan perhitungan probabilitas melalui prosedur yang sesuai.
Object	Menganalisis sifat CDF dan memaknai probabilitas pada titik atau interval.	Menilai keabsahan CDF, menjelaskan bahwa CDF dapat mengalami loncatan pada distribusi diskrit, serta menghubungkan besar loncatan dengan probabilitas pada titik terkait.
Schema	Mengintegrasikan konsep variabel acak, PMF/PDF, CDF, dan probabilitas untuk menyelesaikan masalah.	Menghubungkan PMF/PDF dengan CDF, menentukan probabilitas menggunakan CDF atau integral PDF, serta menjelaskan keterkaitan antarkonsep dalam penyelesaian masalah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Penilaian instrumen dilakukan oleh dua ahli bidang statistika. Hasil penilaian menunjukkan perlunya perbaikan pada redaksi pertanyaan agar lebih mudah dipahami mahasiswa serta konsistensi notasi matematika untuk menghindari penafsiran ganda. Masukan tersebut ditindaklanjuti melalui revisi instrumen sebelum digunakan dalam pengumpulan data utama.

Analisis dilakukan terhadap jawaban tes diagnostik dan wawancara tiga mahasiswa yang dipilih secara purposif, yaitu M1, M2, dan M3. Analisis difokuskan pada identifikasi variabel acak, pemeriksaan PMF/PDF, pembentukan CDF, penentuan probabilitas, interpretasi loncatan CDF, dan hubungan antarkonsep. Temuan dianalisis menggunakan indikator *Action*, *Process*, *Object*, dan *Schema* dalam teori APOS. Ringkasan bukti jawaban tertulis, hasil wawancara, dan interpretasi APOS disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2 Matriks Analisis Pemahaman Mahasiswa Berdasarkan Teori APOS

Subjek	Bukti empiris (tes dan wawancara)	Indikator APOS	Interpretasi
M1	Memperoleh probabilitas interval 0,60 melalui selisih CDF dan integral PDF. Awalnya menyatakan CDF harus kontinu, tetapi setelah klarifikasi mengakui CDF dapat mengalami loncatan pada distribusi diskrit.	*Action* dan indikasi *Process*; bukti *Object* dan *Schema* masih terbatas.	Mampu melakukan prosedur perhitungan, tetapi pemahaman sifat CDF belum konsisten. Perubahan jawaban setelah klarifikasi belum membuktikan pemahaman yang stabil.
M2	Membentuk CDF dari PMF, menggunakan selisih CDF dan integral PDF untuk memperoleh probabilitas interval 0,60, serta menjelaskan makna loncatan CDF pada distribusi diskrit.	Bukti *Action* dan *Process*; indikasi *Object* dan *Schema*.	Menunjukkan hubungan antarkonsep yang relatif konsisten. Namun, bukti belum cukup untuk memastikan *Schema* terintegrasi dan stabil.
M3	Menuliskan $P(X > 1) = 1 + 0{,}7 = 1{,}7$ tetapi dalam wawancara dapat menjelaskan bahwa probabilitas seharusnya dihitung menggunakan aturan komplemen, yaitu $1 - P(X \leq 1)$ dan mengakui kesalahan setelah klarifikasi. Penjelasan sifat CDF belum konsisten	Bukti *Action* dan indikasi *Process*; bukti *Object* dan *Schema* masih terbatas.	Menunjukkan kemampuan prosedural pada sebagian tugas. Penyebab kesalahan komplemen belum dapat dipastikan hanya dari jawaban tertulis, sedangkan pemahaman sifat CDF belum konsisten.

Berdasarkan Tabel 2, ketiga subjek menunjukkan kemampuan prosedural dengan konsistensi pemahaman konseptual yang berbeda. M1 belum konsisten menjelaskan sifat CDF, M2 relatif konsisten menghubungkan antarkonsep, sedangkan M3 masih mengalami kesulitan menerapkan aturan komplemen dan menjelaskan sifat CDF. Perbedaan tersebut menjadi dasar analisis pemahaman setiap subjek berdasarkan indikator APOS.

M1 menunjukkan kemampuan prosedural yang relatif baik pada materi PMF, PDF, dan CDF. Pada soal PMF, M1 memeriksa bahwa jumlah probabilitas adalah $0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1$, kemudian memperoleh $F(0) = 0{,}2, F(1) = 0{,}7$, dan $F(2) = 1$. M1 juga menentukan $P(X \leq 1) = 0{,}7$ serta $P(X > 1) = 0{,}3$ dengan menggunakan komplemen. Jawaban tersebut memperlihatkan kemampuan melakukan prosedur perhitungan dan menggunakan definisi CDF pada distribusi diskrit. Namun, kemampuan prosedural tersebut belum sepenuhnya diikuti pemahaman konseptual yang konsisten, sebagaimana terlihat pada jawaban M1 mengenai sifat CDF.

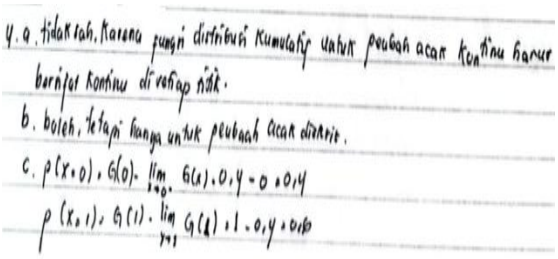
Pada soal nomor 3 tentang PDF, M1 memperoleh fungsi distribusi kumulatif

berbentuk $F(x) = x^2$ pada interval $0 < x < 1$, kemudian menghitung probabilitas interval dengan selisih CDF:

$P(0{,}2 < X < 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}2) = 0{,}64 - 0{,}04 = 0{,}60.$

M1 juga menghitung probabilitas yang sama melalui integral PDF dan memperoleh hasil 0,60. Jawaban ini menunjukkan bahwa M1 dapat menggunakan dua prosedur untuk menyelesaikan masalah probabilitas interval pada distribusi kontinu.

Meskipun mampu melakukan perhitungan probabilitas, M1 belum konsisten memahami sifat CDF. Pada soal 4, M1 menyatakan bahwa CDF tidak valid karena harus kontinu seperti pada Gambar 1.


4. a. tidak tah. Karena fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak kontinu harus berupa kontinu di setiap titik.
b. boleh, tetapi hanya untuk peubah acak diskrit.
c. $P(x=0)$, $G(0)$. $\lim_{x\to 0} G(x) = 0{,}4 = 0{,}4$
$P(x=1)$. $G(1)$. $\lim_{x\to 1} G(1) = 1 \cdot 0{,}4 = 0{,}6$

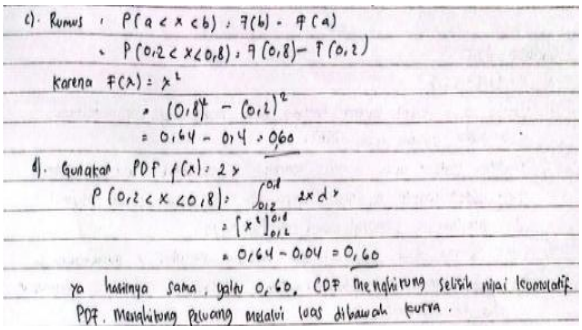
Gambar 1 Jawaban tertulis M1 pada Soal Sifat CDF dan Probabilitas Titik.

Dalam wawancara, M1 menjelaskan, "Karena menurut saya fungsi distribusi kumulatif harus kontinu. Jika ada loncatan, berarti fungsi tersebut tidak memenuhi syarat." Namun, setelah diminta memeriksa kembali jawabannya, M1 mengakui bahwa CDF dapat mengalami loncatan pada distribusi diskrit dan loncatan tersebut berkaitan dengan probabilitas pada nilai tertentu. Perubahan penjelasan setelah klarifikasi ini menunjukkan bahwa pemahaman awal M1 belum konsisten, tetapi belum cukup untuk memastikan bahwa pemahaman konseptualnya telah stabil.

Berdasarkan jawaban tertulis dan wawancara, M1 mampu menentukan probabilitas interval menggunakan selisih CDF dan integral PDF. Namun, penjelasan awalnya bahwa CDF harus kontinu bertentangan dengan pengakuannya setelah klarifikasi bahwa CDF pada distribusi diskrit dapat mengalami loncatan. Hal ini menunjukkan ketidakkonsistenan pemahaman awal. Dalam kerangka APOS, bukti mendukung kemampuan *Action* dan memberikan indikasi *Process*, tetapi belum cukup untuk menyimpulkan *Object* dan *Schema* secara menyeluruh.

M2 menunjukkan pola jawaban yang relatif konsisten dalam menghubungkan PMF, CDF, dan probabilitas. Pada soal 2, M2 menjelaskan bahwa CDF diperoleh dengan menjumlahkan probabilitas secara kumulatif dari nilai terkecil sampai nilai x. Sebagai contoh $F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$. Jawaban tersebut menunjukkan bahwa M2 tidak hanya menentukan nilai CDF, tetapi juga menjelaskan proses pembentukannya dari PMF.

Pada soal 3, M2 mengintegralkan PDF $f(x) = 2x$ untuk memperoleh $F(x) = x^2$ pada interval $0 < x < 1$, kemudian menentukan probabilitas interval sebesar 0,60 melalui selisih CDF dan integral PDF. Pada soal berikutnya, M2 menjelaskan bahwa CDF pada distribusi diskrit dapat mengalami loncatan yang berkaitan dengan probabilitas pada nilai tertentu. M2 juga menggunakan CDF dan aturan komplemen untuk menentukan probabilitas pada soal lain.



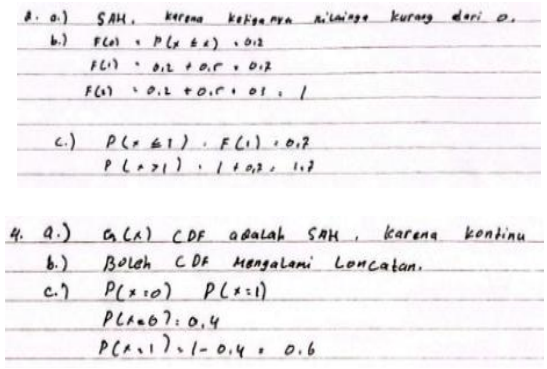
Gambar 2. Jawaban Tertulis M2 dalam Menentukan Probabilitas Interval melalui CDF dan Integral PDF.

Hasil wawancara memperjelas alasan matematis di balik jawaban tertulis M2. M2 menjelaskan bahwa CDF dibentuk melalui akumulasi probabilitas dari PMF. M2 juga menerangkan bahwa selisih CDF menunjukkan probabilitas di antara dua batas, sedangkan integral PDF menentukan probabilitas interval melalui luas di bawah kurva. Penjelasan tersebut menunjukkan bahwa M2 tidak hanya menggunakan prosedur perhitungan, tetapi juga dapat menjelaskan makna matematis yang mendasarinya.

Jawaban tertulis dan wawancara menunjukkan bahwa M2 dapat menjelaskan pembentukan CDF dari PMF, menentukan probabilitas interval menggunakan selisih CDF dan integral PDF, serta menjelaskan loncatan CDF pada distribusi diskrit. Bukti ini menunjukkan kemampuan *Action* dan indikasi *Process* serta koordinasi antarkonsep. Namun, bukti yang tersedia belum cukup untuk memastikan bahwa *Schema* telah terintegrasi dan stabil.

Jawaban tertulis M3 memperlihatkan bahwa sebagian prosedur telah dikuasai, tetapi penerapan aturan komplemen dan pemahaman sifat CDF belum konsisten. Pada soal 2(c), M3 menentukan $P(X \leq 1) = F(1) = 0{,}7$ dengan benar, tetapi menuliskan $P(X > 1) = 1 + 0{,}7 = 1{,}7$. Seharusnya, probabilitas tersebut dihitung menggunakan aturan komplemen, yaitu, $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Penggunaan tanda penjumlahan menunjukkan kesalahan penerapan aturan komplemen pada jawaban tertulis M3.

Pada soal 3, M3 menentukan probabilitas interval menggunakan selisih CDF dan memperoleh hasil 0,6. Namun, jawaban pada soal 4 menunjukkan ketidakkonsistenan dalam memahami sifat CDF. Pada soal 4(a), M3 menyatakan bahwa CDF harus kontinu. Namun, pada soal 4(b), M3 menyatakan bahwa CDF dapat mengalami loncatan. Perbedaan penjelasan tersebut menunjukkan bahwa pemahaman M3 mengenai sifat CDF belum konsisten. Bukti jawaban tertulis M3 pada soal probabilitas komplemen dan sifat CDF disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3 Jawaban Tertulis M3 pada Soal Probabilitas Komplemen dan Sifat CDF

Hasil wawancara memperjelas kesalahan pada soal probabilitas komplemen. M3 mengakui bahwa perhitungan sebelumnya salah dan menjelaskan bahwa $P(X > 1)$ seharusnya dihitung menggunakan $1 - P(X \leq$

1). Penjelasan ini menunjukkan bahwa M3 dapat menyebutkan prosedur yang benar setelah diminta mengklarifikasi jawabannya, tetapi belum membuktikan bahwa prosedur tersebut diterapkan secara konsisten. Oleh karena itu, kesalahan tertulis M3 lebih tepat diinterpretasikan sebagai kesalahan penerapan aturan komplemen; bukti yang tersedia belum cukup untuk memastikan apakah kesalahan tersebut juga melibatkan kesulitan aritmetika atau miskonsepsi konseptual.

Berdasarkan jawaban tertulis dan wawancara, M3 menunjukkan kemampuan *Action* melalui penentuan probabilitas serta indikasi *Process* melalui penjelasan hubungan PDF dan CDF. Namun, kesalahan penerapan aturan komplemen dan ketidakkonsistenan penjelasan sifat CDF membatasi interpretasi terhadap indikator *Object* dan *Schema*. Bukti yang tersedia belum cukup untuk menyimpulkan bahwa M3 telah menunjukkan pemahaman yang konsisten pada kedua struktur tersebut.

Secara keseluruhan, ketiga subjek menunjukkan perbedaan dalam pola pemahaman fungsi distribusi probabilitas berdasarkan indikator APOS. M1 memiliki kemampuan prosedural yang relatif baik, tetapi belum konsisten memahami sifat CDF. M2 menunjukkan pemahaman yang relatif konsisten dalam menghubungkan PMF/PDF, CDF, dan probabilitas, meskipun bukti integrasi antarkonsep masih terbatas. Sementara itu, M3 masih mengalami kesulitan dalam menerapkan aturan komplemen dan menjelaskan sifat CDF secara konsisten. Temuan tersebut menunjukkan bahwa pemahaman mahasiswa perlu dianalisis tidak hanya berdasarkan ketepatan jawaban akhir, tetapi juga melalui proses matematis dan keterkaitan antarkonsep yang mendasari penyelesaian masalah.

Pembahasan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa kemampuan prosedural belum selalu disertai pemahaman konseptual yang konsisten. M1 dan M2 mampu menentukan probabilitas menggunakan CDF, sedangkan M3 keliru menerapkan aturan komplemen. Dalam kerangka APOS, pelaksanaan prosedur menunjukkan *Action*, sedangkan penjelasan alasan matematis memberikan indikasi *Process* (Arnon et al., 2014). Dengan demikian, ketepatan jawaban akhir belum cukup untuk menggambarkan pemahaman mahasiswa.

Perbedaan pemahaman terlihat pada kemampuan menjelaskan hubungan matematis dan sifat CDF. M2 menunjukkan pemahaman yang relatif konsisten terhadap sifat CDF melalui penjumlahan kumulatif PMF pada distribusi diskrit dan integrasi PDF pada distribusi kontinu, termasuk kemungkinan terjadinya loncatan pada distribusi diskrit. Sebaliknya, M1 dan M3 menunjukkan ketidakkonsistenan dalam menjelaskan kemungkinan loncatan CDF pada distribusi diskrit. Temuan ini menunjukkan bahwa kemampuan menggunakan CDF untuk menghitung probabilitas tidak otomatis menunjukkan kemampuan memperlakukan CDF sebagai *Object*, yaitu konsep yang sifat-sifatnya dapat dijelaskan dan diterapkan secara konsisten. Interpretasi ini perlu dibatasi pada

bukti yang tersedia karena perubahan jawaban setelah klarifikasi belum membuktikan pemahaman yang stabil.

Temuan ini sejalan dengan Bansilal (2014), yang menunjukkan bahwa kemampuan menjalankan prosedur distribusi normal belum selalu disertai kemampuan menghubungkan probabilitas dengan luas daerah di bawah kurva. Ng & Chew (2023) menggunakan APOS untuk mengkaji kesalahan pemahaman ukuran penyebaran, sedangkan Syamsuri & Santosa (2021) serta Nailopo et al. (2022) mengkaji pemahaman konsep peluang berdasarkan APOS. Penelitian ini memperluas kajian tersebut pada hubungan PMF/PDF, CDF, dan penentuan probabilitas. M1 dan M3 menunjukkan ketidakkonsistenan dalam memahami sifat CDF, sementara M3 juga keliru menerapkan aturan komplemen. Sebaliknya, M2 memperlihatkan hubungan antarkonsep yang relatif konsisten. Temuan ini menegaskan pentingnya menganalisis penalaran dan keterkaitan konsep, bukan hanya hasil perhitungan (Arnon et al., 2014; Malinda & Hidayati, 2022).

Dalam struktur *Schema*, koordinasi antarkonsep ditelaah melalui kemampuan menghubungkan pembentukan CDF dari PMF atau PDF, penentuan probabilitas menggunakan CDF, dan penjelasan sifat CDF. M2 menunjukkan indikasi awal koordinasi tersebut melalui penjumlahan kumulatif PMF, integrasi PDF, dan selisih CDF. Namun, bukti belum cukup untuk memastikan *Schema* yang terintegrasi dan stabil. Pada M1, prosedur perhitungan belum disertai pemahaman sifat CDF yang konsisten, sedangkan pada M3, penjelasan hubungan PDF dan CDF belum selalu tercermin dalam penerapan aturan probabilitas. Oleh karena itu, interpretasi *Schema* perlu didasarkan pada keluasan dan konsistensi bukti koordinasi antarkonsep, bukan hanya keberhasilan menyelesaikan satu soal.

SIMPULAN (PENUTUP)

Penelitian ini menunjukkan bahwa ketiga subjek memiliki konsistensi pemahaman yang berbeda pada konsep fungsi distribusi probabilitas. M1 mampu melakukan perhitungan, tetapi belum konsisten memahami sifat CDF. M2 relatif konsisten menghubungkan PMF/PDF, CDF, dan probabilitas, meskipun bukti integrasi antarkonsep belum cukup untuk memastikan konstruksi *Schema* yang stabil. Sementara itu, M3 masih mengalami kesulitan menerapkan aturan komplemen dan menjelaskan sifat CDF secara konsisten. Kontribusi utama penelitian ini adalah menunjukkan pentingnya menganalisis pemahaman mahasiswa melalui prosedur, alasan matematis, dan koordinasi antarkonsep berdasarkan teori APOS, bukan hanya ketepatan jawaban akhir.

Dalam pembelajaran, mahasiswa perlu diberi kesempatan untuk menjelaskan alasan matematis, membandingkan representasi, dan memeriksa konsistensi jawaban. Temuan ini perlu ditafsirkan dengan mempertimbangkan keterbatasan penelitian, yaitu analisis mendalam hanya melibatkan tiga mahasiswa yang dipilih secara purposif dan terbatas pada

tugas diagnostik tentang fungsi distribusi probabilitas. Penelitian selanjutnya dapat melibatkan lebih banyak mahasiswa dengan variasi kemampuan yang lebih beragam serta menggunakan tugas dan wawancara lanjutan untuk menelusuri konsistensi pemahaman dan perkembangan koordinasi antarkonsep pada struktur *Schema*.

DAFTAR PUSTAKA

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Solange, ·, Fuentes, R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Artuti, E., Uminastuti, Pandiangan, P., & Hamdani, M. (2021). Kemampuan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Peubah Acak dan Distribusi Peluang di Era Covid-19. *Jurnal Pendidikan*, *22*(1), 12–24. https://doi.org/10.52850/jpn.v22i1.2688

Asra, A., & Boriboon, G. (2025). Exploring Students' Mathematical Representation through the Lens of APOS Theory of APOS Theory: An Exploratory Study. *Rangkiang Mathematics Journal*, *4*(2), 132–143. https://doi.org/10.24036/rmj.v4i2.102

Bansilal, S. (2014). Using An APOS Framework to Understand Teachers' Responses to Questions on The Normal Distribution. *Statistics Education Research Journal*, *13*(2), 42–57. https://doi.org/10.52041/serj.v13i2.279

Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and Learning of Probability. *ZDM - Mathematics Education*, *56*(1), 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Carrera, P. B., Pino-Fan, L. R., Alvarado, H., & Lugo-Armenta, J. G. (2021). Practices of The Random Variable Proposed in The Chilean Mathematics Curriculum of Secondary Education. *Mathematics*, *9*(19), 1–26. https://doi.org/10.3390/math9192435

Dubinsky, E. D., & Mcdonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 275–282). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Lee, B., Yun, Y. S., & Rim, H. (2020). 이봉주(경북대학교, 교수).윤용식(제주대학교, 교수).임해미(공주대학교, 교수) A study on the understanding of mathematics preservice teachers for discrete probability distribution. *JKME: Journal of Korean Mathematics Education*, *59*(1), 47–62. https://doi.org/10.7468/mathedu.2020.59

Leyton, V. B., & Rodríguez, E. R. (2022). Assessment of A Didactic Situation for Teaching The Random Variable and Probability Distribution in Chilean Secondary Education. *Innovaciones Educativas*, *24*(36), 21–36. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3897

Listiawati, E., Juniati, D., & Ekawati, R. (2025). Understanding Mathematics Prospective Teachers' Comprehension of Function Derivatives Based on APOS Theory: Insights from Low Mathematics Anxiety Levels. *Infinity Journal*, *14*(2), 483–512. https://doi.org/10.22460/infinity.v14i2.p483-512

M, P. M. P., & Martin, S. N. (2024). Analysis of First-Year Mathematics Education Students' Understanding of Trigonometry Courses Based on APOS Theory. *Jurnal Prinsip Pendidikan Matematika*, *7*(1), 22–29. https://doi.org/10.33578/prinsip.v7i1.256

Makwakwa, E. G., Mogari, D., & Ogbonnaya, U. I. (2023). First-year Undergraduate Students' Statistical Problem-solving Skills. *Teaching Statistics*, *46*(1), 8–23. https://doi.org/10.1111/test.12359

Malinda, T. T., & Hidayati, W. S. (2022). Analisis Kemampuan Konseptual Peserta Didik dalam Menyelesaikan Soal Nilai Mutlak Berdasarkan Teori APOS. *Pi: Mathematics Education Journal*, *5*(1), 17–26. https://doi.org/10.21067/pmej.v5i1.6417

Nailopo, E., Fitriani, & Simarmata, J. E. (2022). Analisis Pemahaman Konsep Siswa pada Materi Peluang Ditinjau dari Teori APOS pada Siswa SMP Kelas VIII. *Jurnal Eduscience (JES)*, *9*(1), 168–181. https://doi.org/10.36987/jes.v9i1.2587

Ng, C. L., & Chew, C. M. (2023). Uncovering Student Errors in Measures of Dispersion: An APOS Theory Analysis in High School Statistics Education. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(4), 599–614. https://doi.org/10.30935/scimath/13260

Nurrahmah, A., Kartono, K., & Zaenuri, Z. (2021). Analysis of Student's Misconceptions in Solving a Discrete Random Variable. *ISET: International Conference on Science, Education and Technology*, *7*(1), 56–62. https://proceeding.unnes.ac.id/index.php/iset

Pramesti, B. T., & Mampouw, H. L. (2020). Analisis Pemahaman Konsep Peluang Siswa SMP Ditinjau dari Teori APOS. *Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, *04*(02), 1054–1063. https://doi.org/10.31004/cendekia.v4i2.230

Santoso, S. D. R., Lailiyah, S., Setyawati, M., & Rahmawati, W. (2025). Pengaruh Permainan Hompimpa terhadap Pemahaman Konsep Peluang dalam Pembelajaran Matematika. *J-PiMat*, *7*(2), 1873–1882. https://doi.org/10.31932/j-pimat.v7i2.5481

Sulfiah, S. K., Cholily, Y. M., & Subaidi, A. (2021). Professional Competency: Pre-service Mathematics Teachers' Understanding Toward Probability Concept. *JRAMathEdu (Journal of Research and Advances in Mathematics Education)*, *6*(3), 206–220. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v6i3.13779

Supratman, S., Marniati, M., & Sirad, L. O. (2022). Analisis Pemahaman Konsep Mahasiswa USN Kolaka dalam Menyelesaikan Masalah Persamaan Differensial Berdasarkan Teori APOS. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *11*(4), 3019–3030. https://doi.org/10.24127/ajpm.v11i4.5373

Supriadi, A., & Ningsih, Y. L. (2022). Kemampuan Representasi Matematis Mahasiswa pada Materi Distribusi Peluang. *Indiktika : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, *4*(2), 14–25. https://doi.org/10.31851/indiktika.v4i1.7678

Syamsuri, S., & Santosa, C. A. (2021). Thinking Structure of Students' Understanding of Probability Concept in Term of APOS Theory. *MaPan: Jurnal Matematika Dan Pembelajaran*, *9*(1), 119. https://doi.org/10.24252/mapan.2021v9n1a8

Tiengyoo, K., Sotaro, S., & Thaithae, S. (2024). A Study of Mathematical Understanding Levels in Set Theory Based on The APOS Framework by Using Python Programming Language for Secondary School Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *20*(2), 1–3. https://doi.org/10.29333/ejmste/14158

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to The Characterization of The Schema Using APOS Theory: Graphing with Derivativ. *ZDM - Mathematics Education*, *56*(6), 1093–1108. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Wijaya, A., Elmaini, & Doorman, M. (2021). A Learning Trajectory for Probability: A Case of Game-Based Learning. *Journal on Mathematics Education*, *12*(1), 1–16. https://doi.org/10.22342/JME.12.1.12836.1-16